PART3 無限級数と数列の一般項，無限級数の性質

要点整理と公式

要点① 無限級数が収束するための必要条件

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ について考える。

この無限級数の第 n 項までの部分和を $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ とすると

$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

ここで $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ とすると，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

よって $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

したがって，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。

無限級数が収束するための必要条件

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ……(＊)

(＊)の逆，すなわち「$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する」は必ずしも成り立たない。

たとえば $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ は，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが，

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 n 項までの部分和 S_n について

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1 \text{ より}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) =$$

であるから，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

また，(＊)の対偶

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する ……(＊＊)

が成り立つ。つまり，数列 $\{a_n\}$ の一般項の極限が 0 に収束しないならば，部分和を調べることなく無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散することがわかる。(＊＊)の逆は必ずしも成り立たない。

要点② 無限級数の性質

数列の極限値の性質から，次のことが成り立つ。

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し，その和がそれぞれ S，T であるとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS \qquad (k \text{ は定数})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = S+T, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n) = S-T$$

(ex) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}\right)$ の和について

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ は，初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ は，初項 $\frac{1}{5}$，公比 $\frac{1}{5}$ の無限等比級数

公比について，$\left|\frac{1}{4}\right|$ 　　，$\left|\frac{1}{5}\right|$ 　　であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ はともに「　　　」する。

その和はそれぞれ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

3 (1) 無限級数 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots\cdots$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}$ の和を求めよ。

Point Pickup

無限級数の収束・発散

① 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

② 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束し，その和がそれぞれ S，T であるとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n+lb_n)=kS+lT \qquad (k,\ l \text{ は定数})$$

第 4 講　PART3 確認問題

1 無限級数 $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots$ において，第 n 項を a_n とすると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

よって，この無限級数は $\boxed{ウ}$。

$\boxed{ウ}$ は次の①，②のうちから選べ。

①　収束する　　　　②　発散する

2 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$ の和は $\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。

PART3 無限級数と数列の一般項，無限級数の性質

3 (1) 無限級数 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots\cdots$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}$ の和を求めよ。

[解答]

(1) 与えられた無限級数の第 n 項を a_n とすると，$a_n=\frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

よって，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，無限級数 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots\cdots$ は発散する。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は，初項 $\frac{3}{4}$，公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数

$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

公比について，$\left|\frac{3}{4}\right|<1$，$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ はともに収束し，その和はそれぞれ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：②

[解説]

第 n 項 a_n は

$$a_n=\frac{n}{2n+1}$$ [A]

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，無限級数は，**発散する**。[B]

[A]　a_n を n の式で表す。

[B]　無限級数の収束・発散
数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない
$\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する

2 **[正解]** エ：3，オ：2

[解説]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ は，初項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数

公比について，$\left|\frac{2}{3}\right|<1$，$\left|\frac{1}{3}\right|<1$ であるから，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ はともに収束し，その和はそれぞれ，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$ [C]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ [D]

[C]　無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a\neq 0)$ において，

$|r|<1$ ならば収束し，

その和は，$\dfrac{a}{1-r}$

[D]　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束し，その和がそれぞれ S，T であるとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n+lb_n)=kS+lT$$

（k，l は定数）